数理解析研究所講究録
426巻 1981年 107-115

Oscillator 群の Paley-Wiener 型定理

京大 理　　野村隆昭

Hを3次元のHeisenberg群，$\mathfrak{h}$をHのLie algebraとし，$\{P, Q, E\}$を$\mathfrak{h}$のbasisで$[P, Q]=E$なるものとする．$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$に対して，$h(x, y, z)=xP+yQ+zE$とおく．以下では，$u=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$とおいて，$h(x, y, z)$を$h(u, z)$と書くこともある．今，指数写像 exp で$H$と$\mathfrak{h}$のunderlying manifoldを同一視すると，Hの群演算は

$$h(x, y, z)h(x', y', z') = h(x + x', y + y', z + z' + (xy' - x'y)/2)$$

となる．$Z(H)$でHの中心を表すことにすると

$$Z(H) = \{h(0, 0, z) \ ; \ z \in \mathbb{R}\}$$

である．$0 \neq \forall\lambda \in \mathbb{R}$に対して

$$\pi_\lambda(h)f(t) = [\exp -i\lambda(z + tx - \frac{xy}{2})]\ f(-y + t) \qquad (f \in L^2(\mathbb{R}))$$

$$h = h(x, y, z)$$

とおくと，$\{\pi_\lambda, L^2(\mathbb{R})\}$は$H$の既約ユニタリ表現で，$Z(H)$に制限したとき，$h(0, 0, z) \mapsto e^{-i\lambda z}\cdot Id$となるunique な(up to unitary equivalence)ものである．

$$K = SO(2) = \left\{ k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \; ; \; 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$

は，H に $\mathrm{Aut}\,H$ の元として，$k\cdot h(u, z) = h(k\cdot u, z)$ で作用する．この作用を使って，半直積 $G = H \rtimes K$ を作る．

今，$\forall k \in K$ に対して，$\pi_\lambda^k(h) = \pi_\lambda(k^{-1}\cdot h)$ とおくと，π_λ と π_λ^k はユニタリ同値である．従って

$$W(k, \lambda)^{-1}\,\pi_\lambda(h)\,W(k, \lambda) = \pi_\lambda^k(h)$$

をみたす $L^2(\mathbb{R})$ 上のユニタリ作用素 $W(k, \lambda)$ が存在する．この $W(k, \lambda)$ は次の様にして求めることができる．

通常の Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ を定義域とする微分作用素

$$\Delta_0 = -(d/dt)^2 + t^2 - 1$$

を考える．Δ_0 は $L^2(\mathbb{R})$ で本質的自己共役であり，その閉包を Δ とすると，Δ は自己共役．そして，$W_1(\theta) = \exp(\frac{i\theta}{2}\Delta)$ とおくと，

$$W_1(\theta)\,\pi_1(u, z)\,W_1(\theta)^{-1} = \pi_1(k(\theta)\cdot u, z)$$

となる．$L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素 $S(r)$ $(r>0)$，σ を

$$S(r)f(t) = r^{-1/4}\,f(r^{-1/2}t)\;, \quad \sigma f(t) = \overline{f(t)}$$

で定義し，

$$W(\theta, \lambda) = \begin{cases} S(\lambda)^{-1}\,W_1(\theta)\,S(\lambda) & (\lambda > 0) \\ \sigma\,S(|\lambda|)^{-1}\,W_1(\theta)\,S(|\lambda|)\,\sigma & (\lambda < 0) \end{cases}$$

とおくと

$$W(\theta, \lambda)\ \pi_\lambda(u, z)\ W(\theta, \lambda)^{-1} = \pi_\lambda(k(\theta)\cdot u, z)$$

そこで，

$$U(g; \ell, \lambda) = e^{-i\ell\theta}\ \pi_\lambda(h)\ W(\theta, \lambda) \qquad (g = hk(\theta))$$

$$(\ell \in \mathbb{Z}, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\})$$

とおくと，$\{U(\cdot\,;\ell,\lambda),\ L^2(\mathbb{R})\}$ は G の既約ユニタリ表現で，$U(\cdot\,;\ell,\lambda)$ の H への制限は π_λ である．

ϕ_n を n-th Hermite 函数

$$\phi_n(t) = \frac{(-1)^n}{(2^n\cdot n!\cdot\pi^{1/2})^{1/2}}\ e^{t^2/2}\ (d/dt)^n\ e^{-t^2} \qquad (n \in Z_+)$$

とすると，$\{\phi_n\ ;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の CONS をなす．上で定義した $S(r)$ を使って，$\phi_n^\lambda = S(|\lambda|)^{-1}\phi_n$ とおく．各 $\lambda \neq 0$ に対して，$S(|\lambda|)$ はユニタリであるから，$\{\phi_n^\lambda\ ;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ も $L^2(\mathbb{R})$ の CONS である．行列要素

$$u_{mn}(g;\ \ell, \lambda) = (U(g;\ \ell, \lambda)\phi_n^\lambda\ ,\ \ \phi_m^\lambda)$$

は次の様に書ける．$L_n^\alpha(x)$ を Laguerre の多項式

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}\ e^x\ x^{-\alpha}\ (d/dx)^n (e^{-x}\ x^{n+\alpha})$$

とし

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x) = \left[\ \frac{n!}{\Gamma(n+1+\alpha)}\ \right]^{1/2}\ e^{-x/2}\ x^{\alpha/2}\ L_n^\alpha(x)$$

とおくと

$$u_{mn}(g;\ \ell,\ \lambda) =$$
$$= (-1)^{\varepsilon(n,m)}\ e^{i(n\ \mathrm{sgn}\ \lambda\ -\ \ell)\theta} e^{i(n-m)\phi}\ e^{-i\lambda z}\ L^{|m-n|}_{\mathrm{Min}(m,n)}(|\lambda|r^2/2)$$
$$\left(\begin{array}{l} g = h(x,\ y,\ z)k(\theta)\ ,\quad y + ix = re^{i\phi} \\ \varepsilon(n,\ m) = \dfrac{n - m + |n - m|}{2} \end{array}\right)$$

各$\rho > 0$と$\alpha \geq 0$に対して

$$L^{\alpha}_{n,\rho}(x) = (\rho/2)^{1/2}\ L^{\alpha}_{n}(\rho x/2) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

とおく．$\{\mathcal{L}^{\alpha}_{n,\rho}\ ;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$は$L^2(0, \infty)$においてCONSをなす．$f \in L^2(0, \infty)$に対して，$\{\mathcal{L}^{\alpha}_{n,\rho}\ ;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$に関するそれのFourier係数を$\{a^{\alpha}_n(f\ ;\ \rho)\ ;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$とおく．すなわち

$$a^{\alpha}_{n}(f;\ \rho) = \int_0^{\infty} f(t)\ L^{\alpha}_{n,\rho}(t)\ dt$$

対応 $f \mapsto \{a^{\alpha}_n(f;\ \rho)\ ;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ をFourier－Laguerre変換と呼ぶことにする．各$T > 0$に対して

$$L^2_T(0,\ \infty) = \{\ f \in L^2(0,\ \infty)\ ;\ f(t) = 0 \quad \text{a.e.}\quad t > T\ \}$$

とおき，$\ell^2_T(\rho;\alpha)$ ($\rho > 0,\ \alpha \geq 0$) を，次の条件をみたす，$\mathbb{Z}_+$で定義された数列$\{a_n\} \in \ell^2 \equiv \ell^2(\mathbb{Z}_+)$の全体とする．

$$\limsup_{n \to \infty}\ n \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left[\frac{k!}{\Gamma(k + 1 + \alpha)} \right]^{1/2} a_k \right|^{1/n} \leq \frac{e\rho T}{2}$$

$\ell^2_T(\rho, \alpha)$ が ℓ^2 の線型部分空間であることは容易にわかる.

定理1. $\rho > 0$, $\alpha \geq 0$ を固定する. このとき, Fourier-Laguerre 変換 $f \mapsto \{a_n^\alpha(f;\rho)\}$ は $L^2_T(0,\infty)$ から $\ell^2_T(\rho;\alpha)$ の上への線型同型写像である.

この定理に, 古典的な Riesz-Fischer の定理を援用すると, $\ell^2_T(\rho;\alpha)$ は ℓ^2 で閉じていることがわかる. また, $\mathcal{L}^\alpha_{n,\rho}$ は $L^2_T(0,\infty)$ に属さないので, n 番目だけが 1, 他は全て 0 という数列は, $\ell^2_T(\rho,\alpha)$ に属さないことに注意する.

定理1の証明は [1] を参照されたい. 手段としては, 通常の Laplace 変換が, $L^2(0,\infty)$ を右半面上の Hardy 空間 $\mathcal{H}$ に写すこと, $\Omega^\alpha_{n,\rho}$ を $\mathcal{L}^\alpha_{n,\rho}$ の Laplace 変換とすると

$$f = \sum a_n \mathcal{L}^\alpha_{n,\rho} \quad \text{in} \quad L^2(0,\infty)$$

$$\iff F(s) = \sum a_n \Omega^\alpha_{n,\rho} \quad \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, s > 0 \text{ で絶対} \\ \mathrm{Re}\, s \geq \delta > 0 \text{ で一様} \end{pmatrix}$$

(F は f の Laplace 変換)

が成立すること, 及び指数型整函数の Taylor 展開における係数の評価を用いる.

$$Q_T = \{ h(x, y, z)k \ ; \ |x|^2 + |y|^2 \leq T, \ \ |z| \leq T, \ \ k \in K \}$$

とし, $L^2_T(G)$ で以て, $f \in L^2(G)$ で $\mathrm{supp}\, f \subset Q_T$ なるも

の全体，$L^2(G) \ni f$ で

$$f(k(\phi)h(o, r, z)k(\psi)) = e^{-ip\phi} f[r, z] e^{-iq\psi}$$

for some measurable function such that

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} |f[r, z]|^2 r\, dr\, dz < \infty$$

となるもの全体を L^2_{pq}，$L^2_{pq,T} = L^2_{pq} \cap L^2_T(G)$ とおく．以下，$f[\cdot] = Rf$ と書く．このとき，

$f \in L^2_{pq,T} \Rightarrow Rf[r, z] = 0$ a.e. for $r > T^{1/2}$ or $|z| \geq T$

に注意する．更に，$f \in L^2_{pq,T}$ のとき

$$\Phi f[r, \lambda] = \int_{-\infty}^{\infty} Rf[r, z]\, e^{-i\lambda z}\, dz$$

とおき，各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して，$H_{pq,T}(n)$ でもって

$$\Phi f[r, m\pi/T] = 0 \quad \text{a.e.} \quad r > 0 \quad \text{and any} \quad m \neq n \quad (m \in \mathbb{Z})$$

をみたす $f \in L^2_{pq,T}$ の全体とする．

$$\psi_{n,T}(z) = \begin{cases} (2T)^{-1/2} e^{in\pi z/T} & |z| \leq T \\ 0 & |z| < T \end{cases}$$

$$F_f(r; n) = (2T)^{-1/2} \Phi f[r, n\pi/T]$$

とおくと

$$f \in H_{pq,T}(n) \Rightarrow Rf[r, z] = F_f(r; n)\, \psi_{n,T}(z)$$

従って，$f \in H_{pq,T}(n)$ のとき，

$$\int_G f(g)\, u_{mn}(g;\, \ell,\, \lambda)\, dg = \delta_{m\,\mathrm{sgn}\lambda,\, p+\ell}\, \delta_{n\,\mathrm{sgn}\lambda,\, q+\ell}\, (-1)^{\varepsilon_\lambda(p,q)}\, |\lambda|^{-1/2} \times$$

$$\times \int_{-T}^{T} \psi_{n,T}(z)\, e^{-i\lambda z}\, dz \int_0^\infty F_f(r^{1/2};\, n)\, L^{|p-q|}_{M_\lambda(p+\ell,q+\ell),|\lambda|}(r)\, dr$$

$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon_\lambda(p,q) = [(q-p)\mathrm{sgn}\lambda + |q-p|] \\ M_\lambda(p,q) = \mathrm{Min}(p\,\mathrm{sgn}\lambda\ ,\ \ q\,\mathrm{sgn}\lambda\ ) \end{array}\right)$$

$\varphi_T(\lambda) = (2T^{-1})^{1/2}(\sin T\lambda)/\lambda$ とし，各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\varphi_{n,T}(\lambda) = \varphi_T\left(\lambda - \frac{n\pi}{T}\right)$$

とおく．$\mathcal{A}_\alpha$ $(\alpha \geq 0)$ を次の性質を持つ写像 $a: \mathbb{R}_+^\times \to \ell^2$ の全体とする．

(i) $\exists \rho_0 > 0$ such that $a(\rho_0) \in \ell^2_T(\rho_0, \alpha)$

(ii) $c^\alpha_{mn}(\rho_1,\, \rho_2) = \int_0 L^\alpha_{n,\rho_2}(t)\, L^\alpha_{m,\rho_1}(t)\, dt$ とおき，

$C^\alpha(\rho_1, \rho_2)$ を無限行列 $(c^\alpha_{mn}(\rho_1, \rho_2))$ の定める ℓ^2 上のユニタリ作用素とするとき，

$$a(\rho_1) = C^\alpha(\rho_1, \rho_2)\, a(\rho_2)$$

ここで，(i)，(ii)より，$\forall \rho > 0$ に対して，$a(\rho) \in \ell^2_T(\rho, \alpha)$ となることに注意しておく．

$\mathcal{H}_{pq,T}(n)$ を次の形に書ける函数 F on $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^\times$ の全体とする．

$$F(\ell, \lambda) = \begin{cases} (-1)^{\varepsilon_\lambda(p,q)} |\lambda|^{-1/2} a_{M_\lambda(p+\ell,\, q+\ell)}(|\lambda|)\, \varphi_{n,T}(\lambda) & \text{for } M_\lambda(p+\ell,\, q+\ell) \geq 0 \\ 0 & \text{for } M_\lambda(p+\ell,\, q+\ell) < 0 \end{cases}$$

for some $a \in A_{|p-q|}$

$F \in \mathcal{H}_{pq,T}(n)$ のとき，

$$\|F\|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\ell, \lambda)|^2 \, |\lambda| \, d\lambda < \infty$$

であり，このノルムで $\mathcal{H}_{pq,T}(n)$ は Hilbert 空間になっている．

G 上の Haar 測度を，K 上の正規化された Haar 測度 dk と $\mathbb{R}^3$ の通常の Lebesgue 測度を用いて

$$\int f(g)\, dg = \int_K dk \int_{\mathbb{R}^3} f(h(x, y, z)k)\, dxdydz$$

と正規化しておく．

定理 2　$\mathcal{F}_{pq} : f \longmapsto \int f(g)\, U_{(p+\ell)\operatorname{sgn}\lambda,\, (q+\ell)\operatorname{sgn}\lambda}(g; \ell, \lambda)\, dg$ は $H_{pq,T}(n)$ から $\mathcal{H}_{pq,T}(n)$ への unitary な写像である．

$L^2_{pq,T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oplus H_{pq,T}(n)$ であるから，$\mathcal{H}_{pq,T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_{pq,T}(n)$ とすると，$\mathcal{F}_{pq}$ は $L^2_{pq,T}$ から $\mathcal{H}_{pq,T}$ への unitary な写像であることがわかる．更に，$F \in \mathcal{H}_{pq,T}$，$F = \sum F_n$ （$F_n \in \mathcal{H}_{pq,T}(n)$）とすると

定理3　$F(\ell,\lambda)=\sum F_n(\ell,\lambda)$ は，$\ell\in\mathbb{Z}$ と $\lambda\in\mathbb{R}^\times$ に関して一様収束する．

定理3を $p\in\mathbb{Z}$，$q\in\mathbb{Z}$ に渡って加えれば，$L^2_T(G)$ の像が特徴付けられるが，本稿では述べない．詳しくは[1]を参照されたい．

なお，急減少函数の特徴付けに関しては[2]を参照されたい．

文献

[1] T. Nomura, The Paley-Wiener type theorem for the oscillator group, Preprint, 1980.

[2] D. Geller, Fourier analysis on the Heisenberg group I. Schwartz space, J. Funct. Anal., 36(1980), 205-254.